

ΓΥΜΝΑΣΙΟ 2010

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ Γ'

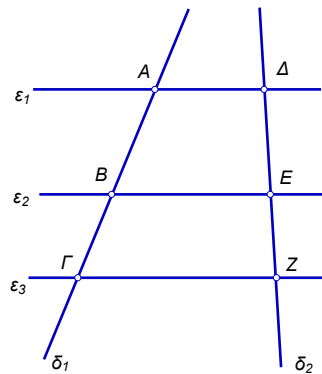
ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Πότε μια αλγεβρική παράσταση λέγεται μονώνυμο και από ποια μέρη αποτελείται;
- B.** Πότε δύο μονώνυμα λέγονται όμοια;
- Γ.** Τι λέγεται πολυώνυμο;

Θέμα 2^ο

- A.** Να διατυπώσετε την πρόταση που είναι γνωστή ως θεώρημα του Θαλή.
- B.** Στο διπλανό σχήμα ισχύει ότι είναι $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2 \parallel \epsilon_3$. Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή.



- Γ.** Πότε δύο πολύγωνα είναι όμοια;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Να αποδείξετε την παρακάτω ισότητα:

$$(2x - 1)^2 - (x + 2)^2 - (2x - 1) \cdot (4x - 3) + x^2 \cdot (x - 1) = (x - 2)^3 - 10x + 2$$

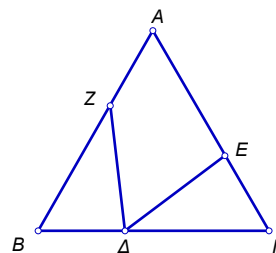
Άσκηση 2^η

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{10 - 3x - 6x^2}{x^2 - 4} + \frac{2x^2 - 3}{x - 2} - \frac{2x^2}{x + 2} = 0$$

Άσκηση 3^η

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στην πλευρά ΒΓ παίρνουμε τμήμα ΒΔ, στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε τμήμα ΓΕ και στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΑΖ, ώστε ΒΔ = ΓΕ = ΑΖ.



Να δείξετε ότι:

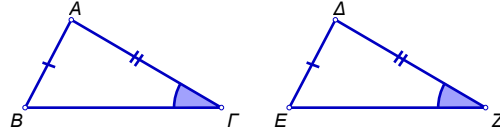
- A.** Τρίγωνο ΒΔΖ = Τρίγωνο ΔΕΓ
- B.** ΔΖ = ΔΕ.

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

- A. Πότε λέμε ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα; (ορισμός)
B. Γράψτε τα κριτήρια ισότητας δύο τριγώνων.

Είναι τα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle EZ$ ίσα;
(δικαιολογήστε την απάντησή σας)



Θέμα 2^ο

- A. Να συμπληρώσετε τις ταυτότητες:
α. $(\alpha + \beta)^2 = \dots\dots\dots$
β. $(\alpha - \beta)^3 = \dots\dots\dots$
γ. $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \dots\dots\dots$
B. Να αποδείξετε την ταυτότητα:
 $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

- A. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:
 $x^2 - 16$ και $x^2 - 5x + 4$
B. Να βρεθεί το Ε. Κ. Π. των παραστάσεων:
 $(x^2 - 16)$, $(x^2 - 5x + 4)$, $(4 - x)$
Γ. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{1}{x^2 - 16} + \frac{1}{4 - x} + \frac{1 - x}{x^2 - 5x + 4} = 0$$

Άσκηση 2^η

Να λυθεί το σύστημα:

$$2(y + x) - 3(y - 3) = x - 2y + 11$$

$$\frac{2x + y}{3} = y + x - 3$$

Άσκηση 3^η

Να αποδείξετε ότι: $\epsilon\phi^2 54^\circ \sigma\upsilon\nu^2 54^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 126^\circ = 1$

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Τι ονομάζεται μονώνυμο, από ποια μέρη αποτελείται, τι λέγεται βαθμός του μονωνύμου και πότε δύο μονώνυμα λέγονται όμοια;
(Να δώσετε παραδείγματα).

B. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

α. $(\alpha - \beta)^2 =$

β. $(\alpha + \beta)^3 =$

γ. $\alpha^2 - \beta^2 =$

δ. $\alpha^3 + \beta^3 =$

Γ. Να αποδείξετε τη δ.

Θέμα 2^ο

A. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να ορίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$. (Να κάνετε σχήμα)

B. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

α. $\eta\mu 90^\circ =$ **β.** $\sigma\upsilon\nu 180^\circ =$ **γ.** $\epsilon\phi 0^\circ =$ **δ.** $\eta\mu 60^\circ =$ **ε.** $\sigma\upsilon\nu 45^\circ =$

στ. $\epsilon\phi 30^\circ =$ **ζ.** $\eta\mu 150^\circ =$ **η.** $\sigma\upsilon\nu 135^\circ =$ **θ.** $\epsilon\phi 120^\circ =$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Στο διπλανό σχήμα είναι $AB = 5\text{cm}$,

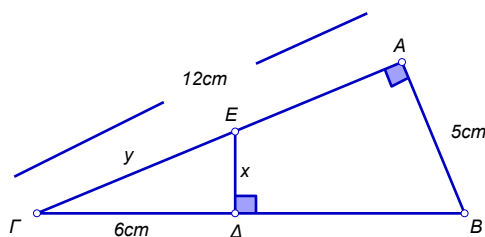
$AG = 12\text{cm}$, $GD = 6\text{cm}$.

A. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα

$\Gamma\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια.

B. Να υπολογίσετε τα x , y και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.

Γ. Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των δύο τριγώνων.



Άσκηση 2^η

Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{3x + 2y}{2} = \frac{x + 4y}{6} + y + 2 \\ 2x - \frac{x + y}{3} = \frac{x + 5}{2} \end{cases}$$

Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα που βρήκατε.

Άσκηση 3^η

Να λύσετε την εξίσωση:
$$\frac{2}{x-2} + \frac{x}{x+1} + 1 = \frac{3}{x^2 - x - 2}$$

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Τι γνωρίζετε για τη συνάρτηση $y = ax^2$ με $a \neq 0$; (σχήμα)
- B.** Έστω η συνάρτηση $y = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$. Τι παριστάνει;
Ποιες οι συντεταγμένες της κορυφής της; Πότε έχει ελάχιστο, πότε μέγιστο και ποιο είναι αυτό;

Θέμα 2^ο

- A.** Να διατυπωθεί το Θεώρημα του Θαλή και σε σχήμα να γραφούν οι σχέσεις που το εκφράζουν.
- B.** Σε δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουμε:
- α.** $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\hat{B} = \hat{B}'$
- β.** $\alpha = \alpha'$, $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$
- γ.** $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$
- δ.** $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$

Σε ποιες περιπτώσεις τα τρίγωνα είναι ίσα και γιατί;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

$$A = (x^2 - 3x + 1)^2 - 1$$

$$B = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

- A.** Να παραγοντοποιηθούν οι A, B.
- B.** Για ποιες τιμές του x έχει νόημα η παράσταση $\frac{A}{B}$ και κατόπιν να απλοποιηθεί.
- Γ.** Να λυθεί η εξίσωση $\frac{A}{B} = -1$

Άσκηση 2^η

Έστω το σύστημα:

$$2x + 3y = 3\alpha + \beta$$

$$x - 2y = \alpha + 2\beta$$

Να προσδιοριστούν τα α , β αν το (Σ) έχει λύση $(x, y) = (2, 3)$.

Άσκηση 3^η

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνω τη βάση $B\Gamma$ και από τις δύο μεριές και παίρνω τμήματα $B\Delta = \Gamma E$. Αν M, N είναι τα μέσα των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να δειχθεί ότι $\Delta N = M E$. Αν η ΔN και η $M E$ τέμνονται στο K και φέρω την KZ κάθετη στην ΔE , να δειχθεί ότι: το Z είναι μέσον της ΔE .

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Να συμπληρώσετε τις ταυτότητες:

α. $(\alpha + \beta)^2 = \dots\dots\dots$

β. $(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \dots\dots\dots$

γ. $(\alpha - \beta)^3 = \dots\dots\dots$

δ. $(\alpha - \beta) (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \dots\dots\dots$

B. Να αποδείξετε την πρώτη και την τέταρτη ταυτότητα.

Θέμα 2^ο

Δίνεται η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$.

Να γράψετε τον τύπο της διακρίνουσας $\Delta = \dots\dots\dots$

α. Πότε η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις; Γράψτε τον τύπο των λύσεων.

β. Πότε η εξίσωση έχει μια διπλή λύση; Γράψτε τον τύπο της.

γ. Πότε η εξίσωση είναι αδύνατη;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{4}{x^2 - 1} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x^2 + x}$$

Άσκηση 2^η

Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} - \frac{y}{3} = -1 \\ -2x + y = 6 \end{cases}$$

Άσκηση 3^η

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με

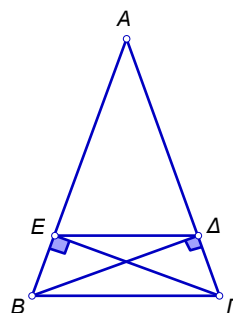
AB = ΑΓ. Από το μέσο Μ της βάσης

ΒΓ, φέρνουμε τα τμήματα ΜΔ ⊥ ΑΒ

και ΜΕ ⊥ ΑΓ. Να αποδείξετε ότι:

A. ΜΔ = ΜΕ

B. Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.



ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδειχτεί η ταυτότητα:

$$(α + β)^3 = α^3 + 3 α^2β + 3αβ^2 + β^3.$$

B. Να συμπληρωθούν οι ταυτότητες:

α. $α^2 - 2αβ + β^2 = \dots\dots$

β. $α^3 - β^3 = \dots\dots$

γ. $(α - β) \cdot (α + β) = \dots\dots$

δ. $(α + β) \cdot (α^2 - αβ + β^2) = \dots\dots$

Θέμα 2^ο

A. Να γράψετε τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

B. Να γράψετε τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Να λυθεί η εξίσωση:

$$9(x + 2)^2 - 18(2x + 3) = 8x + 14 + 4x(2x - 1).$$

Άσκηση 2^η

Αν για μία γωνία ω δίνεται $90^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$ και $\eta\mu\omega = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, να υπολογιστούν το $\sigma\upsilon\nu\omega$ και η

εφ ω .

Άσκηση 3^η

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 2x + 6 = x - y \\ y + \frac{y - 2x}{3} = -4 \end{cases}$$

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να αποδείξετε την ταυτότητα $(a - \beta)^2 = a^2 - 2a\beta + \beta^2$.
- B.** Τι λέγεται παραγοντοποίηση;
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.
- α.** Ισχύει $(a + \beta)^2 = a^2 + \beta^2$.
- β.** Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ έχει δύο άνισες ρίζες αν $\Delta = 0$.
- γ.** Το πολυώνυμο $P(x) = 2010$ είναι μηδενικού βαθμού.
- δ.** Η εξίσωση $5x = 0$ είναι αδύνατη.
- ε.** Κλασματική λέγεται κάθε εξίσωση που περιέχει ένα τουλάχιστον κλάσμα.

Θέμα 2^ο

- A.** Να γράψετε τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.
- B.** Να γράψετε τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.
- α.** Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους μία προς μία ίσες, τότε είναι ίσα.
- β.** Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και μια γωνία ίση, τότε είναι ίσα.
- γ.** Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

- A.** Να λύσετε την εξίσωση: $3x^2 + 5x - 2 = 0$.
- B.** Αν η πιθανότητα $P(A)$ ενός ενδεχομένου A είναι ρίζα της παραπάνω εξίσωσης να υπολογιστεί η $P(A')$. Αν ακόμη δίνονται $P(B) = \frac{1}{2}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ να υπολογίσετε την $P(A \cup B)$.

Άσκηση 2^η

Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $\eta\mu\omega = \frac{12}{13}$ να υπολογίσετε:

- A.** το $\sigma\upsilon\nu\omega$, **B.** την $\epsilon\phi\omega$, **Γ.** την τιμή της παράστασης $A = \frac{13\sigma\upsilon\nu\omega - 2\sigma\upsilon\nu 120^\circ}{5\epsilon\phi\omega}$

Άσκηση 3^η

- A.** Να λύσετε το σύστημα:

$$x - 5y = 5$$

$$2x + y = 54$$

- B.** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = \sqrt{4 + \sqrt{x}} + \sqrt{14 + \sqrt{y}} - \sqrt{xy}$
όπου (x, y) η λύση του συστήματος του ερωτήματος **A**.

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις γράφοντας στην κόλλα σας την ένδειξη Σωστή ή Λάθος δίπλα στον αριθμό της κάθε ερώτησης.
- α.** Δύο τρίγωνα που έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία είναι ίσα.
- β.** Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα.
- γ.** Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν δύο γωνίες και δύο πλευρές τους είναι ίσες μία προς μία.
- B. α.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Θαλή.
- β.** Αν είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$ και τέμνουν τις ευθείες δ_1, δ_2 στα σημεία A, B, Γ, και A', B', Γ', αντίστοιχα γράψτε την επόμενη ισότητα ορθά συμπληρωμένη: $\frac{AB}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

Θέμα 2^ο

- A.** Να αντιστοιχίσετε τις ταυτότητες της στήλης A με τα αντίστοιχα αναπτύγματα της στήλης B. Η αντιστοίχιση να γραφτεί στην κόλλα σας, γράφοντας δίπλα στο γράμμα της στήλης A τον αριθμό που αντιστοιχεί στη στήλη B, ως εξής:
- A → , B → , Γ → , Δ →

ΣΤΗΛΗ A	ΣΤΗΛΗ B
A. $(\alpha + \beta)^3$	1. $(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$
B. $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$	2. $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
Γ. $(\alpha - \beta)^2$	3. $\alpha^3 + \beta^3$
Δ. $\alpha^3 - \beta^3$	4. $\alpha^2 - \beta^2$
	5. $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
	6. $(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

- B.** Να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Έστω γωνία ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$, για την οποία ισχύει $\text{συν}\omega = -\frac{3}{5}$.

- A.** Η γωνία ω είναι οξεία ή αμβλεία; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
- B.** Να αποδείξετε ότι:
- α.** $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$ **β.** $\epsilon\phi\omega = -\frac{4}{3}$

- Γ.** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\frac{\epsilon\phi\omega - \text{συν}120^\circ}{\eta\mu\omega - \epsilon\phi135^\circ}$.

Άσκηση 2^η

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = (x + 2)^2 - 4(x + 5)$ και $B = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} : \frac{1}{6x - 6}$

- A.** Να αποδείξετε ότι: $A = x^2 - 16$
- B.** Να αποδείξετε ότι: $B = 6x$
- Γ.** Να λύσετε την εξίσωση: $A + B = 0$.

Άσκηση 3^η

Δίνεται το ακόλουθο σύστημα: $\begin{cases} (2x + 3)(x - 1) - y = 2x^2 + 1 \\ x - (y - 2)^2 = -y^2 + 20 \end{cases}$

- A.** Να αποδείξετε ότι μετά από πράξεις γράφεται στη μορφή: $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + 4y = 24 \end{cases}$
- B.** Να λύσετε το σύστημα στη νέα μορφή.

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Να συμπληρώσετε τις ταυτότητες:

$$(a - \beta)^2 = \dots\dots\dots \text{ και } (a + \beta)(a^2 - a\beta + \beta^2) = \dots\dots\dots$$

B. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(a - \beta)^3 = a^3 - 3a^2\beta + 3a\beta^2 - \beta^3$$

Θέμα 2^ο

A. Ποια είναι τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου και ποια είναι τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου;

B. Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας δύο τριγώνων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^2+x-2} = \frac{x+1}{3x+6}$$

Άσκηση 2^η

Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = \frac{4-5x}{6} \\ 2y - x = 3 \end{cases}$$

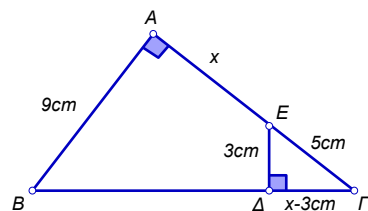
Άσκηση 3^η

Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα ABΓ και EΔΓ είναι ορθογώνια με $\widehat{A} = 90^\circ$ και $\widehat{E\Delta\Gamma} = 90^\circ$. Επίσης δίνονται AB = 9cm, EΔ = 3cm, EΓ = 5cm, AE = x και ΔΓ = x - 3.

A. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABΓ και ΔEΓ είναι όμοια.

B. Να υπολογίσετε το x.

Γ. Να υπολογίσετε την πλευρά BΓ του τριγώνου ABΓ.



ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Να συμπληρωθούν οι ισότητες:

$$(\alpha + \beta)^2 = \dots, (\alpha - \beta)^3 = \dots \text{ και } (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \dots$$

B. Να αποδείξετε τη δεύτερη.

Θέμα 2^ο

Να γράψετε τα τρία (3) κριτήρια ισότητας τριγώνων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{x}{x-3} + \frac{2}{4-x} = \frac{x}{x^2 - 7x + 12}$$

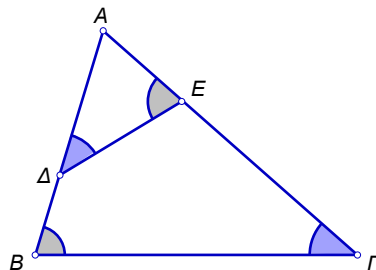
Άσκηση 2^η

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 2 \cdot (5x + 3y) - 5 \cdot (x - 2y) = 22 \\ 4x - 3y = 5x - 8y + 12 \end{cases}$$

Άσκηση 3^η

Στο διπλανό σχήμα ισχύουν $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{AE\Delta}$,
 $\widehat{A\Delta E} = \widehat{A\Gamma B}$ και $AB = 6\text{cm}$, $A\Gamma = 10\text{cm}$,
 $B\Gamma = 12\text{cm}$, $A\Delta = 4\text{cm}$.

- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι όμοια.
- Να γραφούν οι ίσοι λόγοι των αντίστοιχων πλευρών.
- Να υπολογιστούν τα AE και ΔE .



ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Να ορίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$.

B. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύουν:

α. $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

β. $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

Θέμα 2^ο

A. Ποια είναι η γενική μορφή μιας εξίσωσης 2^{ου} βαθμού με έναν άγνωστο;

B. Ποια παράσταση ονομάζουμε διακρίνουσα;

Γ. Να αντιστοιχίσετε τα ερωτήματα της στήλης (A) με τις απαντήσεις της στήλης (B) στον παρακάτω πίνακα γνωρίζοντας ότι αναφέρονται σε εξίσωση 2^{ου} βαθμού:

Στήλη A	Στήλη B
Διακρίνουσα	Λύσεις εξίσωσης
A. $\Delta > 0$	α. Διπλή λύση
B. $\Delta < 0$	β. Αόριστη
Γ. $\Delta = 0$	γ. Αδύνατη
	δ. Δύο λύσεις άνισες

Μία απάντηση της στήλης (B) περισσεύει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (AB = AΓ) και ένα σημείο O στο εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο ώστε να ισχύει OB = OΓ. Να αποδειχθούν ότι:

A. $\widehat{OB\Gamma} = \widehat{O\Gamma B}$

B. $\widehat{ABO} = \widehat{A\Gamma O}$

Γ. Τα τρίγωνα ABO και AΓO είναι ίσα μεταξύ τους.

Άσκηση 2^η

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{3x-4}{x^2-5x+6} + \frac{x}{3-x} + \frac{2}{x-2} = 0$$

Άσκηση 3^η

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + (y+1)^2 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

Να αποδείξετε τις αξιοσημείωτες ταυτότητες:

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

Θέμα 2^ο

Να αποδείξετε ότι:

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \text{ (Να γίνει σχήμα)}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

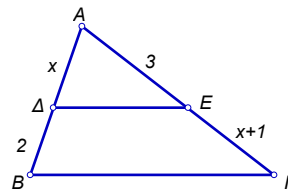
Να γίνουν οι πράξεις: $\frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{1}{\alpha^2 + \alpha\beta} - \frac{1}{2\alpha^2 - 2\alpha\beta}$

Άσκηση 2^η

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{3x}{2} = 6 - \frac{y}{5} \\ \frac{x+2}{4} - \frac{y-3}{6} = 2 \end{cases}$$

Άσκηση 3^η

Στο διπλανό σχήμα (σκαρίφημα) να βρεθεί το x αν είναι γνωστό ότι ισχύει $\Delta E \parallel B\Gamma$.



ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Τι λέγεται μονώνυμο και από τι αποτελείται;
Δώστε ένα παράδειγμα μονωνύμου στο οποίο και να αναφέρετε από τι αποτελείται.
- B.** Πότε δύο μονώνυμα λέγονται όμοια; Δώστε ένα παράδειγμα.
- Γ.** Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς λ, μ ώστε η αλγεβρική παράσταση $2x^\lambda y^{\mu-2} + 3x^2y$ να είναι μονώνυμο.

Θέμα 2^ο

- A.** Τι ονομάζεται ταυτότητα;
- B.** Να αποδείξετε την ταυτότητα $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- Γ.** Να συμπληρώσετε τις ταυτότητες:
 $(a + b)(a - b) =$
 $(a - b)^3 =$
 $a^3 + b^3 =$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και η διχοτόμος του $A\Delta$. Έστω M τυχαίο σημείο της $A\Delta$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $MB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Άσκηση 2^η

- A.** Αν $-1 < a < 2$ και $1 < \beta < 5$, να συμπληρώσετε τα κενά.

$$\dots < 3a < \dots, \dots < -\beta < \dots, \dots < 3a - \beta < \dots$$

(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).

- B.** Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$2x + 5 < \frac{x}{2} + 2 \text{ και } \frac{x-1}{2} + 1 > x + \frac{1}{3}$$

Άσκηση 3^η

Να εξετάσετε αν έχουν κοινή λύση οι εξισώσεις:

$$3x^2 - 5x + 2 = 0 \text{ και } \frac{3x-2}{x-3} - \frac{7x-12}{x^2-3x} = \frac{x-4}{x}.$$

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να διατυπώσετε το θεώρημα που αναφέρεται σε ίσα τμήματα μεταξύ παράλληλων ευθειών.
- B.** Να αποδείξετε ότι αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του, τότε αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.
- Γ.** Να γράψετε τα κριτήρια ισότητας δύο ορθογωνίων τριγώνων.

Θέμα 2^ο

- A.** Να αποδείξετε τη σχέση $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ (να γίνει σχήμα).
- B.** Ο τύπος $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ ισχύει για τις γωνίες των 0° , 90° και 180° ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
- Γ.** Να γράψετε τους τύπους που συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς δύο παραπληρωματικών γωνιών.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

- A.** Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

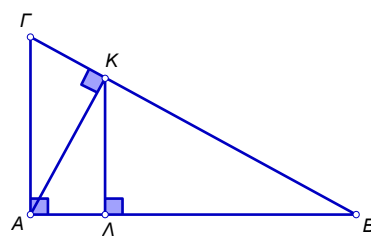
$$A = \frac{x^4 + 8x}{2x^4 - 4x^3 + 8x^2} \quad \text{και} \quad B = \frac{3x^2 - 6x}{2x^2 - 8}$$

και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $A - B = 1$.

Άσκηση 2^η

Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) φέρνουμε το ύψος AK προς την υποτείνουσα. Από το K φέρνουμε την $K\Lambda$ κάθετη στην AB . Να αποδείξετε:

- A.** ότι τα τρίγωνα $AK\Gamma$, $AK\Lambda$ είναι όμοια και
- B.** ότι $AK^2 = A\Gamma \cdot K\Lambda$.



Άσκηση 3^η

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax^2 + \beta x + 3$ διέρχεται από τα σημεία

$A(-2, -5)$ και $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$. Να βρείτε τα a , β και στη συνέχεια για $a = -1$ και $\beta = 2$ να

βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της παραπάνω συνάρτησης με τους άξονες x' και y' (υπολογιστικά).

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Να δώσετε τον ορισμό της ταυτότητας.

B. Να συμπληρώσετε και στη συνέχεια να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(\alpha + \beta)^3 = \dots$$

Γ. Να χαρακτηρίσετε σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ) τις παρακάτω σχέσεις:

α. $(\alpha - \beta)^2 = (\beta - \alpha)^2$

β. $(-\alpha - \beta)^2 = -(\alpha + \beta)^2$

γ. $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\beta - \alpha)$

Θέμα 2^ο

A. Με τη βοήθεια κατάλληλου σχήματος να ορίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας αμβλείας γωνίας ω .

B. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

$$\eta\mu 180^\circ = \dots\dots\dots$$

$$\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = \dots\dots\dots$$

$$\epsilon\phi 90^\circ = \dots\dots\dots$$

Γ. Να χαρακτηρίσετε σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ) τις σχέσεις:

α. $\eta\mu^2 \omega = 1 + \sigma\upsilon\nu^2 \omega$

β. αν $\omega = 110^\circ$ τότε $\sigma\upsilon\nu \omega > 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

A. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A = \frac{x(x^2 + 3x + 2)}{x^2 + 4x + 4} \quad \text{και} \quad B = \frac{4x^2 - 8x}{2x^2 - 8}$$

B. Να λύσετε την εξίσωση: $B - A = 0$

Άσκηση 2^η

Δίνεται το πολυώνυμο $x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 6$.

Να βρείτε τα α, β αν η αριθμητική τιμή του

για $x = -1$ είναι 0 και για $x = 3$ είναι 24.

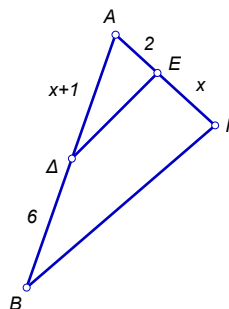
Άσκηση 3^η

Στο διπλανό σχήμα είναι $DE \parallel B\Gamma$.

A. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα

$\triangle ADE$ και $\triangle AB\Gamma$ είναι όμοια.

B. Να υπολογίσετε το μήκος x .



ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Για κάθε πραγματικό αριθμό α και β να δείξετε ότι:

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

B. Να συμπληρώσετε τα αναπτύγματα των ταυτοτήτων:

$$(\alpha + \beta)^2 = \dots\dots$$

$$(\alpha - \beta)^3 = \dots\dots$$

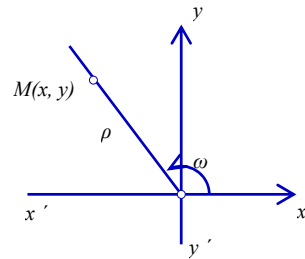
$$(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \dots\dots$$

Θέμα 2^ο

A. Στο διπλανό σχήμα δίνεται σημείο $M(x, y)$

τέτοιο ώστε να είναι $\widehat{xOM} = \hat{\omega}$ και $OM = \rho$.

Να ορίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω συναρτήσει των συντεταγμένων του σημείου M και να γράψετε τη σχέση του ρ με τις συντεταγμένες του σημείου M .



B. Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία ω ισχύει η ισότητα:

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x-3}{x+2} - \frac{2x^2-11x-10}{x^2-4} = \frac{x}{x-2}$

Άσκηση 2^η

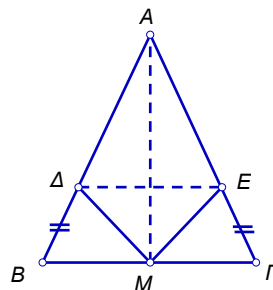
Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{x-2}{4} - 1 = \frac{2(y+1)}{3} \\ 4x + y + 8 = 2(x-y) \end{cases}$$

Άσκηση 3^η

Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ το σημείο M είναι μέσο της βάσης $B\Gamma$. Αν είναι $B\Delta = \Gamma E$, να αποδείξετε ότι:

A. το τρίγωνο $M\Delta E$ είναι ισοσκελές

B. τα τρίγωνα $A\Delta M$ και AEM είναι ίσα.



ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να αποδείξετε ότι: $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
- B.** Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της 1^{ης} στήλης με τα στοιχεία της 2^{ης}:

1 ^η Στήλη	2 ^η Στήλη
1. $(\alpha + \beta)^2$	A. $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
2. $(\alpha - \beta)^2$	B. $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$
3. $(\alpha + \beta)^3$	Γ. $\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
4. $\alpha^2 - \beta^2$	Δ. $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
5. $(\alpha - \beta)^3$	E. $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

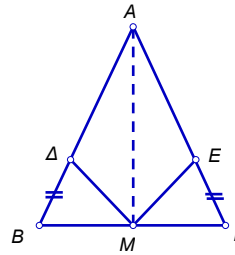
Θέμα 2^ο

- A.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Θαλή.
- B.** Να γίνει σχήμα και να γραφτούν οι αντίστοιχες σχέσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Στο ισοσκελές τρίγωνο ABΓ του διπλανού σχήματος το σημείο M είναι μέσο της βάσης ΒΓ. Αν είναι ΒΔ = ΓΕ να αποδείξετε ότι ΜΔ = ΜΕ.



Άσκηση 2^η

Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x}{x+3} - \frac{2}{x-3} = \frac{-(x+1)}{x^2-9}$$

Άσκηση 3^η

Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} x - 2y = 6 \\ \frac{3x}{4} - y = 14 \end{cases}$$

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Τι είναι μονώνυμο, ποια τα μέρη του και πότε δύο μονώνυμα λέγονται όμοια;

Να δώσετε παράδειγμα.

B. Να βρεθεί και να αποδειχθεί το ανάπτυγμα στις παρακάτω δύο ταυτότητες:

$$(\alpha + \beta)^2 \text{ και } (\alpha + \beta)^3$$

Θέμα 2^ο

Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας τριγώνου καθώς και τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 2(x-1) + 3y = -3 \\ 3x - 5(y-1) = -6 \end{cases}$$

Άσκηση 2^η

A. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $2x + 2$

β. $3x - 6$

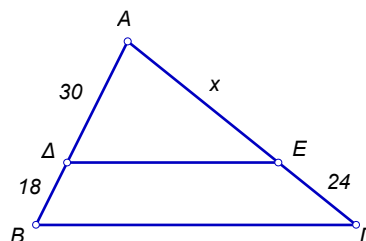
γ. $x^2 - x - 2$

B. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{4}{x^2 - x - 2} - \frac{x + 5}{2x + 2} = \frac{2x}{3x - 6}$$

Άσκηση 3^η

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε το τμήμα ΔE παράλληλο στη $B\Gamma$. Αν είναι $AE = x$, $A\Delta = 30$, $\Delta B = 18$ και $E\Gamma = 24$ να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Delta$ και $E\Gamma$.



ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να διατυπώσετε το νόμο των Ημιτόνων, Συνημιτόνων σε ένα τρίγωνο.
B. Σε τρίγωνο ΔΕΖ να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ με το νόμο των Συνημιτόνων και μετά να επιλύσετε τον παραπάνω τύπο ως προς το συνημίτονο της γωνίας Δ.

Θέμα 2^ο

Δίνεται η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$

- A.** Να γράψετε τους τύπους που μας δίνουν τη Διακρίνουσα και τις λύσεις της εξίσωσης.
B. Για τις διάφορες τιμές της Διακρίνουσας να διακρίνετε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

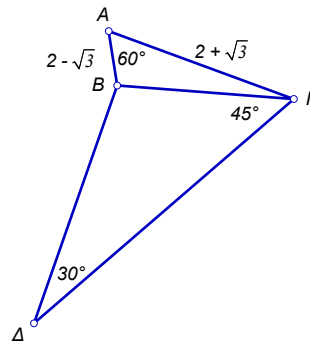
Άσκηση 1^η

Στο παρακάτω σχήμα είναι:

$$AB = \sqrt{3} - \sqrt{2}, \quad A\Gamma = \sqrt{3} + \sqrt{2},$$

$$\hat{A} = 60^\circ, \quad \hat{\Delta} = 30^\circ \text{ και } \widehat{B\Gamma\Delta} = 45^\circ.$$

- A.** Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 3$
B. Να υπολογίσετε τη ΒΔ.



Άσκηση 2^η

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = 4 - x^2$$

$$B = x^2 + 4x + 4$$

$$\Gamma = x^2 - x - 2$$

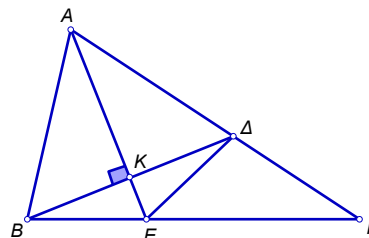
- A.** Να παραγοντοποιηθούν οι παραπάνω παραστάσεις.

- B.** Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{\Gamma} = 0$

Άσκηση 3^η

Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας Α και από την κορυφή Β φέρνουμε τη ΒΚ κάθετο στη διχοτόμο ΑΔ η οποία τέμνει την ΑΓ στο Ε.

- A.** Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.
B. Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.



ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Να συμπληρώσετε τις ταυτότητες:

$$(\alpha - \beta)^2 =$$

$$(\alpha + \beta)^3 =$$

$$(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) =$$

B. Να αποδείξετε την τελευταία ταυτότητα.

Θέμα 2^ο

A. Πότε δύο τρίγωνα λέμε ότι είναι ίσα;

B. Διατυπώστε τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

Σε κάθε περίπτωση να σχεδιάσετε το αντίστοιχο σχήμα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Να λυθεί το σύστημα:

$$\frac{x+1}{3} + \frac{y-1}{2} = 5$$

$$3(x-1) - 2(y-6) = 15 - x.$$

Άσκηση 2^η

A. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:

$$3x + 3, x^2 - 1, x^2 - x.$$

B. Αφού αντικαταστήσετε τα πολυώνυμα που παραγοντοποιήσατε, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{3x+3}{x^2-1} - \frac{2}{x^2-x} = \frac{2}{x}.$$

Γ. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) είναι: το Δ μέσο της ΑΒ, το Ε μέσο της ΑΓ και το Μ μέσο της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα.

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες:

- A.** Το άθροισμα μονωνύμων είναι μονώνυμο.
- B.** Το γινόμενο μονωνύμων είναι μονώνυμο.
- Γ.** Το πηλίκο μονωνύμων είναι μονώνυμο.
- Δ.** Το μηδενικό μονώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.
- E.** Το σταθερό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.
- ΣΤ.** Το άθροισμα όμοιων μονωνύμων είναι μονώνυμο όμοιο μ' αυτά.

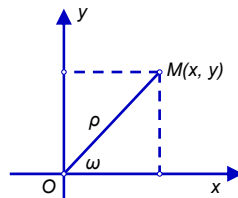
Θέμα 2^ο

Στο διπλανό σχήμα δίνεται σημείο $M(x, y)$

τέτοιο ώστε να είναι $OM = \rho$ και $\widehat{XOM} = \omega$.

Να αποδείξετε ότι:

- A.** $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ και
- B.** $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{x-10}{x^2-2x} - \frac{x+2}{x} = 1 + \frac{x+2}{2-x}$.

Άσκηση 2^η

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{2x+y}{3} - \frac{x-y}{2} = -\frac{2}{3} \\ 3(x-2) - 2(y-1) = 1 \end{cases}$$

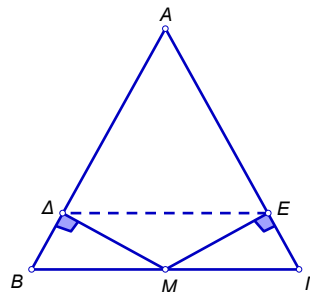
Άσκηση 3^η

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$).

Από το μέσο M της βάσης $B\Gamma$ φέρνουμε τις

κάθετες $M\Delta \perp AB$ και $ME \perp A\Gamma$.

- A.** Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔBM και $EM\Gamma$ και να αποδείξετε ότι $M\Delta = ME$.
- B.** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.



ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

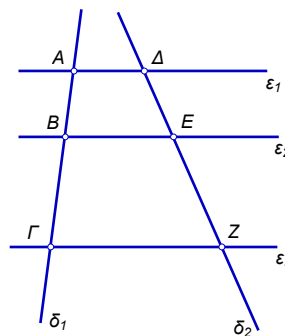
- A.** Να γράψετε τη γενική μορφή εξίσωσης 2^{ου} βαθμού και τον τύπο που δίνονται οι λύσεις της.
- B.** Να εξετάσετε χωρίς να λυθούν, ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις έχουν λύσεις (και πόσες) και ποιες είναι αδύνατες:
 $4x^2 - 4x + 1 = 0$, $x^2 - 2x + 5 = 0$, $3x^2 + x - 10 = 0$.

Θέμα 2^ο

- A.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Θαλή (σχήμα)
- B.** Στο διπλανό σχήμα $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$.

Να συμπληρώσετε τις αναλογίες:

- ◆ $\frac{AB}{BG} = \dots\dots\dots$,
- ◆ $\frac{AG}{AB} = \dots\dots\dots$,
- ◆ $\frac{BG}{AG} = \dots\dots\dots$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x+1}{2(x+2)} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^2+3x+2}$

Άσκηση 2^η

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \frac{x-5}{2} = 3 - \frac{2y+1}{3} \\ 2(x+4) - 3(y-6) = 24 \end{cases}$

Άσκηση 3^η

Αν $\sin \omega = -\frac{4}{5}$ και $90^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$.

- A.** Να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .
- B.** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
 $B = 10\sin \omega - 8\epsilon\phi\omega + 5\eta\mu(180^\circ - \omega)$.

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

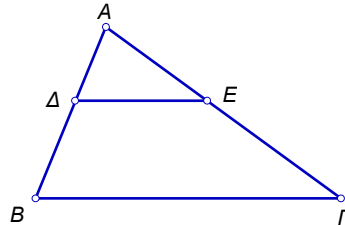
- A. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Θαλή (σχήμα – αναλογία).
B. Αν $DE \parallel B\Gamma$ ποιες από τις παρακάτω σχέσεις είναι Σωστές και ποιες Λάθος;

α. $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EG}$

β. $\frac{AD}{AB} = \frac{AG}{AE}$

γ. $\frac{DB}{EG} = \frac{AD}{AE}$

δ. $\frac{DB}{EG} = \frac{AB}{AG}$



Θέμα 2^ο

- A. Να συμπληρώσετε τις ταυτότητες:

$$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) =$$

$$(\alpha - \beta)^3 =$$

$$\alpha^3 + \beta^3 =$$

- B. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Να λυθεί η εξίσωση: $-\frac{1}{x} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x^2 - 2x}$

Άσκηση 2^η

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = AG$. Προεκτείνω τις πλευρές AB και AG προς το μέρος των B και Γ αντίστοιχα κατά ίσα τμήματα $B\Delta = \Gamma E$. Αν M είναι το μέσο της βάσης $B\Gamma$, να δείξετε ότι $M\Delta = ME$.

Άσκηση 3^η

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{x-1}{3} + \frac{y-2}{6} = \frac{1}{2} \\ 2 \cdot (x-1) - x + 4y = 3y \end{cases}$$

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Τι λέγεται ταυτότητα;

B. Συμπληρώστε τις ισότητες:

α. $\alpha^3 - \beta^3 = \dots$

β. $\alpha^3 + \beta^3 = \dots$

γ. $\alpha^2 - \beta^2 = \dots$

Γ. Αποδείξτε ότι:

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

Θέμα 2^ο

Διατυπώστε το Θεώρημα του Θαλή κάνοντας και το αντίστοιχο σχήμα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών να λυθεί η εξίσωση:

$$1 - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2-x} = \frac{2 \cdot x}{x^2 - 4}$$

Άσκηση 2^η

Βρείτε τις πραγματικές τιμές των x και y λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} \\ 3x - y = 11 \end{cases}$$

Άσκηση 3^η

Αν για την οξεία γωνία ω γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$, υπολογίστε την τιμή της παράστασης:

$$10 \cdot \eta\mu\omega - \frac{5}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\omega - 12 \cdot \epsilon\phi\omega$$

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδειχθεί η ταυτότητα:

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

B. Χαρακτηρίστε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τα παρακάτω:

α. $(\kappa - \lambda)^2 = \kappa^2 - 2\kappa(-\lambda) + (-\lambda)^2$

β. $(x - 2\kappa)(x^2 + 2\kappa x + 4\kappa^2) = x^3 - 8\kappa^3$

γ. $y^2 - 9x^2 = (y - 3x)[y + (-3x)]$

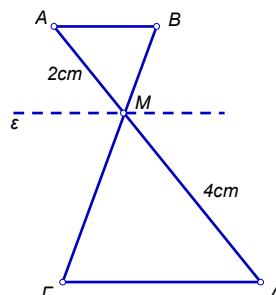
Θέμα 2^ο

A. Διατυπώστε το Θεώρημα του Θαλή

(κανόνας - σχέση - σχήμα).

B. Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος, αντιστοιχίστε τα στοιχεία της στήλης A με αυτά της στήλης B:

Είναι $AB \parallel \varepsilon \parallel \Gamma\Delta$, $AM = 2$, $M\Delta = 4$.



ΣΤΗΛΗ A	ΣΤΗΛΗ B
α. $\frac{BM}{M\Gamma}$	1. $\frac{1}{2}$
β. $\frac{M\Gamma}{B\Gamma}$	2. 3
γ. $\frac{B\Gamma}{BM}$	3. $\frac{3}{2}$
δ. $\frac{BM}{B\Gamma}$	4. $\frac{2}{3}$
	5. $\frac{1}{3}$

α	β	γ	δ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

A. Λύστε την εξίσωση:

$$x(x - 2) = 3$$

B. Παραγοντοποιήστε το τριώνυμο:

$$x^2 - 2x - 3$$

Γ. Αν x_1 η μικρότερη λύση της (α) και x_2 η μεγαλύτερη, να αποδείξετε τη σχέση:

$$9(x_1 \eta \mu \omega)^2 + (x_2 \sigma \upsilon \nu \omega)^2 = 9$$

Άσκηση 2^η

A. Να λύσετε το σύστημα εξισώσεων:

$$2(\alpha + 3) - 2(\beta - 1) = 10$$

$$3(\alpha - 1) + 2(\beta + 3) = 11$$

B. Για τις τιμές των α, β που βρήκατε στο (α) ερώτημα να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\beta}{x+1} + \frac{\alpha}{x^2-1} - \beta = 0$$

Άσκηση 3^η

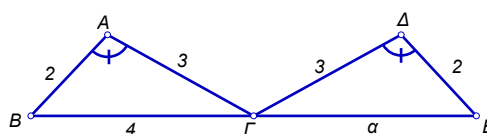
Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος:

A. να αναφέρετε το κριτήριο βάσει του οποίου τα τρίγωνα ABΓ και ΓΔΕ είναι ίσα

B. να βρείτε το μήκος α της πλευράς ΓΕ

Γ. αν $\alpha = 4$ να απλοποιήσετε την παράσταση Κ αφού πρώτα παραγοντοποιήσετε τον

$$\text{αριθμητή της : } K = \frac{x(x-5) + \alpha + 2}{x^2 - 9}$$



ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

- A. Πότε δύο ή περισσότερα μονώνυμα λέγονται όμοια;
- B. Πότε δύο μονώνυμα λέγονται αντίθετα;
- Γ. Τι λέγεται συντελεστής ενός μονωνύμου;

Θέμα 2^ο

- A. Αν ω και $180^\circ - \omega$ είναι παραπληρωματικές γωνίες, να χαρακτηρίσεις κάθε μία από τις παρακάτω ισότητες, με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες:
 - α. $\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$
 - β. $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\eta\mu\omega$
 - γ. $\epsilon\phi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\phi\omega$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Να λύσεις την εξίσωση:

$$-7x + x^2 = -6$$

Άσκηση 2^η

Να παραγοντοποιήσεις το πολυώνυμο:

$$x^2 - 10x + 25 - \omega^2 =$$

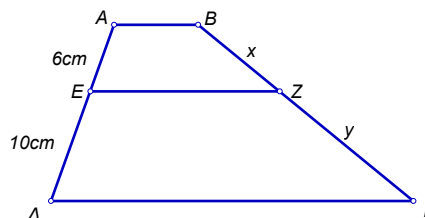
Άσκηση 3^η

Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι:

$EZ \parallel AB \parallel \Delta\Gamma$, $AE = 6\text{m}$, $E\Delta = 10\text{m}$,

$B\Gamma = 24\text{m}$, $BZ = x$ και $Z\Gamma = y$.

Να υπολογίσεις τα μήκη των τμημάτων x και y .



ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αντιγράψετε και να συμπληρώσετε τις ταυτότητες:

α. $(\alpha + \beta)^2 = \dots\dots\dots$

β. $\alpha^3 - \beta^3 = \dots\dots\dots$

γ. $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \dots\dots\dots$

B. Να αποδείξετε την ταυτότητα $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

Θέμα 2^ο

A. Πότε δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα;

B. Ποια είναι τα κύρια και ποια τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τυχαίου τριγώνου;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Να λυθεί η εξίσωση: $1 - \frac{x+2}{x-2} = \frac{x-10}{x^2-2x} - \frac{x+2}{x}$

Άσκηση 2^η

Δίδεται το σύστημα:

$$ax - by = 4$$

$$(2\alpha + 3)x + (\beta + 2)y = 45$$

Να βρείτε τους αριθμούς α και β ώστε το σύστημα να έχει λύση το ζεύγος:

$$(x, y) = (5, 2)$$

Άσκηση 3^η

Δίδεται το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $(AB = A\Gamma)$.

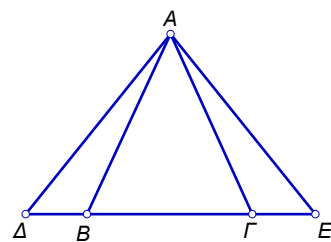
Προεκτείνουμε τη βάση $B\Gamma$ κατά τμήματα $B\Delta = \Gamma E$,

όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να αποδείξετε

ότι:

A. το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ίσο με το τρίγωνο $A\Gamma E$

B. το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.



ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α. $(\alpha - \beta)^2 = \dots\dots\dots$

β. $(\alpha - \beta)^3 = \dots\dots\dots$

γ. $(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \dots\dots\dots$

B. Να αποδείξετε τη δεύτερη ισότητα.

Θέμα 2^ο

A. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Θαλή (σχήμα)

B. Για δύο σημεία Δ, Ε των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντιστοίχως ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύουν οι προτάσεις:

α. Αν $\Delta E \parallel B\Gamma$ τότε $\dots\dots\dots$

β. Αν $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{A\text{E}}{E\Gamma}$ τότε $\dots\dots\dots$

Να συμπληρώσετε τις προτάσεις (σχήμα).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Να λύσετε την εξίσωση:

$$(2x - 1)^2 - (x + 2)^2 = (x + 2)(x - 2) + x^2 - 2(5x - 2)$$

Άσκηση 2^η

Να λύσετε το σύστημα:

$$2(2x - 3y) - (3x - 5y) = 1$$

$$3(x - 2) - 2(y + 1) = -4$$

Άσκηση 3^η

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) και ΑΔ το ύψος του. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι όμοια. Αν ΑΓ = 4 cm και ΒΓ = 5 cm, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΓΔ.

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να ορίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων.
- B.** Να αποδείξετε ότι: $\eta\omega^2 + \sigma\omega^2 = 1$.

Θέμα 2^ο

- A.** Συμπληρώστε την ισότητα $(\alpha - \beta)^2 = \dots\dots$
- B.** Συμπληρώστε την ισότητα $(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \dots\dots$
- Γ.** Να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{2x-1}{3} + \frac{y}{2} = \frac{1}{3} \\ \frac{2y-1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{x+1}{3} \end{cases}$$

Άσκηση 2^η

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις: $A = -7x + 7$ και $B = x^3 - x$.

Να απλοποιηθεί το κλάσμα $\frac{A}{B}$.

Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{A}{B} = -\frac{7}{2}$.

Άσκηση 3^η

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, προεκτείνουμε τη βάση $B\Gamma$ κατά $B\Delta = \Gamma E$.

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

Να συγκρίνετε τις αποστάσεις των B και Γ από τις $A\Delta$ και $A E$ αντίστοιχα.

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Τι λέγεται ταυτότητα;
- B.** Να γράψετε 5 ταυτότητες συνδέοντας με = τις παραστάσεις της Ομάδας A με τις σωστές παραστάσεις από την Ομάδα B.

ΟΜΑΔΑ A	ΟΜΑΔΑ B
$(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$	$\alpha^2 + \beta^2$
$(\alpha + \beta)^2$	$\alpha^3 + \beta^3$
$(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$	$\alpha^2 - \beta^2$
$(\alpha + \beta)^3$	$\alpha^3 - \beta^3$
$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$	$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
	$\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

- Γ.** Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

Θέμα 2^ο

- A.** Ποια πρόταση λέγεται θεώρημα του Θαλή; (σχήμα και προτάσεις)
- B.** Να αναφέρετε την εφαρμογή του θεωρήματος Θαλή στο τρίγωνο (σχήμα και πρόταση).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Δίνονται οι παρακάτω εξισώσεις. Να δείξετε ότι μόνο μία από αυτές δεν είναι αδύνατη και να βρείτε τις λύσεις της:

$$3x^2 + 5 = 0, 3x^2 - 5x + 4 = 0, 3x^2 - 5x + 2 = 0$$

Άσκηση 2^η

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με πλευρές $a = 8\text{m}$, $\beta = 9\text{m}$ και $\gamma = 10\text{m}$.

Να υπολογίσετε τις γωνίες A, B και Γ του τριγώνου.

Άσκηση 3^η

Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + 14 = \frac{3y}{4} \\ \frac{x+1}{3} + 8 = \frac{y-2}{5} \end{cases}$$

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Τι λέγεται ταυτότητα;

B. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

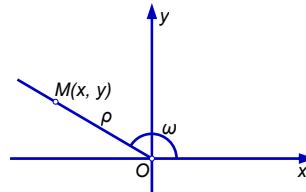
$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

Γ. Να γράψετε σε παραγοντοποιημένη μορφή τις παραστάσεις (μόνο το αποτέλεσμα):

A. $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 =$

B. $\alpha^2 - \beta^2 =$

Γ. $\alpha^3 + \beta^3 =$



Θέμα 2^ο

A. Με τη βοήθεια του σχήματος να ορίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω (ημ ω , συν ω , εφ ω).

B. Να αποδείξετε ότι, για μια γωνία ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$, ισχύει:

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x+1}{x-3} = \frac{12}{x^2-3x} - \frac{x-2}{x}$$

Άσκηση 2^η

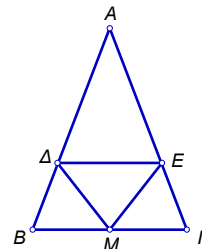
Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} 3(x-2y) + 2(2x-y) = 6 \\ \frac{x+y}{5} - \frac{x-y}{2} = \frac{1}{10} \end{cases}$$

Άσκηση 3^η

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με AB = ΑΓ και το σημείο Μ είναι μέσο της ΒΓ. Επίσης ισχύει ότι ΒΔ = ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:

- A.** το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ισοσκελές.
- B.** τα τρίγωνα ABΓ και ΑΔΕ είναι όμοια.



ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Τι ονομάζεται ταυτότητα;
- B.** Να συμπληρωθούν οι ταυτότητες:
 $\alpha^2 - \beta^2 = \dots\dots$
 $(\alpha - \beta)^3 = \dots\dots$
- Γ.** Αποδείξτε την ταυτότητα:
 $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

Θέμα 2^ο

- A.** Να οριστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί τυχαίας γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$
- B.** Να αποδειχτεί η ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$.
(Να γίνει το κατάλληλο σχήμα).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

- A.** Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 6x} \text{ και } B = \frac{2x}{x^2 - 2x}$$

- B.** Να λυθεί η εξίσωση: $A + B = \frac{4}{x^2 - 2x}$,

όπου A και B οι απλοποιημένες παραστάσεις του α ερωτήματος.

Άσκηση 2^η

Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{3x+2}{4} - \frac{y+5}{6} = 1 \\ 4y - (x-2y) = x+2 \end{cases}$$

Άσκηση 3^η

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (AB = ΑΓ). Στις προεκτάσεις της βάσης ΒΓ παίρνουμε αντίστοιχα σημεία Δ και Ε τέτοια ώστε ΒΔ = ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:

- A.** Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΓ είναι ίσα.
- B.** Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

ΘΕΩΡΙΑ

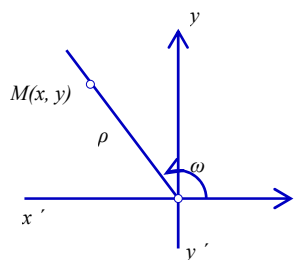
Θέμα 1^ο

A. Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων με βάση τις συντεταγμένες του σημείου $M(x, y)$

α. Να ορίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = \text{χο}M$.

β. Να αποδείξετε την ισότητα: $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$.

γ. Υπάρχει γωνία, ώστε $\eta\mu\omega = 0$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$;
(Να υπάρξει δικαιολόγηση).



Θέμα 2^ο

A. Να συμπληρώσετε τις ταυτότητες:

$$\alpha^2 - \beta^2 = \dots\dots\dots \alpha \quad \beta \quad \beta - \alpha$$

B. Να αποδειχθεί η ταυτότητα: $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

Γ. Είναι σωστή η ισότητα: $\alpha - \beta^2 = \beta - \alpha^2$;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Να λυθεί η εξίσωση:

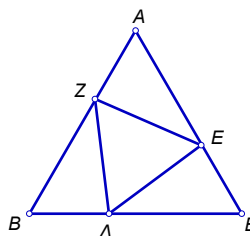
$$6x^2 - 2x - 8 = 0$$

Άσκηση 2^η

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{4x}{3} - \frac{y-1}{2} = 3 \\ \frac{3x}{2} - \frac{9y-1}{4} = 1 \end{cases}$$

Άσκηση 3^η

Στο ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ κάθε πλευρά είναι 8cm και τα AZ , $B\Delta$, ΓE είναι 3cm. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔEZ είναι ισόπλευρο.



ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Να συμπληρώσετε τις ταυτότητες:

α. $(\alpha - \beta)^2 =$

β. $(\alpha + \beta)^3 =$

γ. $(\alpha + \beta)(\beta - \alpha) =$

B. Να συμπληρωθεί και να αποδειχθεί η ταυτότητα: $\alpha^3 - \beta^3 =$

Θέμα 2^ο

A. Να διατυπωθούν τα κριτήρια ισότητας δύο τυχαίων τριγώνων

(κανόνες και σχήμα για κάθε περίπτωση)

B. Πότε δύο τρίγωνα είναι όμοια (κανόνες)

Γ. Τα όμοια τρίγωνα είναι και ίσα;

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

A. Να παραγοντοποιηθούν και να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = \frac{x^2 - 4}{2x^2 + 4x}$$

$$B = \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 4}$$

$$\Gamma = \frac{4x}{x^3 - 2x^2}$$

B. Να λυθεί η εξίσωση: $A + B = \Gamma$ όπου A, B και Γ οι απλοποιημένες παραστάσεις του πρώτου ερωτήματος.

Άσκηση 2^η

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 3x - y = 11 \\ \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{3} \end{cases}$$

Άσκηση 3^η

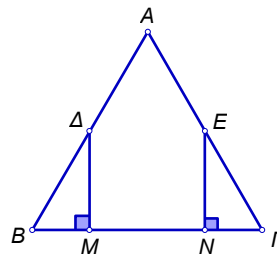
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (AB = ΑΓ).

Από τα μέσα Δ και Ε των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα φέρνουμε ΔΜ και ΕΝ κάθετα στη ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

A. Τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΕΝΓ είναι ίσα.

B. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια.



ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Να συμπληρώσετε τις σχέσεις που ακολουθούν ώστε να προκύψουν γνωστές ταυτότητες:

α. $(\alpha + \beta)^2 = \dots\dots$

β. $(\alpha + \beta)^3 = \dots\dots$

γ. $\alpha^2 - \beta^2 = \dots\dots$

δ. $\alpha^3 - \beta^3 = \dots\dots$

B. Να συμπληρώσετε και να αποδείξετε την ταυτότητα $(\alpha - \beta)^2 = \dots\dots$

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ):

α. $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - \beta^3$

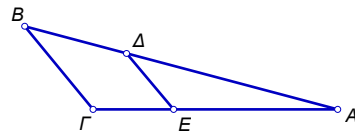
β. $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x - \alpha)(x - \beta)$

Θέμα 2^ο

A. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Θαλή.

B. Να κάνετε το αντίστοιχο σχήμα και να γράψετε τη σχέση που το εκφράζει.

Γ. Στο διπλανό σχήμα είναι $DE \parallel BF$. Να γράψετε τη σχέση που ισχύει λόγω αυτής της παραλληλίας.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Δίνονται οι εξισώσεις: $2x^2 - 9x - 5 = 0$ και $4x^2 + 4x + 1 = 0$.

A. Να λύσετε τις παραπάνω εξισώσεις.

B. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

$2x^2 - 9x - 5 = 0$ και $4x^2 + 4x + 1 = 0$

Γ. Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{2x^2 - 9x - 5}{4x^2 + 4x + 1}$.

Άσκηση 2^η

Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:

$A = \eta\mu 150^\circ + \sigma\upsilon\nu 160^\circ - \eta\mu 30^\circ + \sigma\upsilon\nu 20^\circ + \epsilon\phi 130^\circ + \epsilon\phi 50^\circ$.

Άσκηση 3^η

Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{x-5}{2} + \frac{2y+1}{3} = 3 \\ \frac{x+4}{3} - \frac{y-6}{2} = 4 \end{cases}$$

Να το φέρετε στη μορφή, $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$ και στη συνέχεια να το λύσετε.

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Να συμπληρωθούν οι παρακάτω ταυτότητες:

α. $(\alpha - \beta) \cdot (\alpha + \beta) =$

β. $(\alpha - \beta) \cdot (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) =$

γ. $(\alpha - \beta)^3 =$

δ. $(\alpha + \beta)^2 =$

B. Να αποδειχτεί η ταυτότητα:

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3 \cdot \alpha^2\beta + 3 \cdot \alpha\beta^2 + \beta^3$$

Θέμα 2^ο

A. Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας τυχαίων τριγώνων.

B. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Θαλή (δώστε το σχήμα και τη σχέση που ισχύει).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Να λύσετε την παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{2-x}{x-3} - \frac{x+3}{x+4} = \frac{5}{x^2+x-12}$$

Άσκηση 2^η

Να λύσετε το παρακάτω σύστημα:
$$\begin{cases} 2(x-1) - 3(y+2) = 4 \\ 5x - 4(y-2) = 3(x+5) \end{cases}$$

Άσκηση 3^η

Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

$$A = \eta\mu 135^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 120^\circ \cdot \epsilon\phi 150^\circ =$$

$$B = \frac{\eta\mu 45^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 135^\circ \cdot \epsilon\phi 60^\circ}{\epsilon\phi 150^\circ}$$

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Να συμπληρώσετε τις ταυτότητες:

$$(α + β)^2 = \dots\dots$$

$$(α + β)^3 = \dots\dots$$

$$(α + β)(α - β) = \dots\dots$$

B. Να συμπληρώσετε και να αποδείξετε την ταυτότητα $(α - β)^2 = \dots\dots$

Θέμα 2^ο

A. Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας δύο τριγώνων.

B. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και (Λ) αν είναι λανθασμένες:

α. Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.

β. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία τότε είναι ίσα.

γ. Σε δύο τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Να κάνετε τις πράξεις στην παράσταση:

$$(2x + 3)^2 + x(x - 2)^2 - (2x - 1)(2x + 1)$$

Άσκηση 2^η

Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} 2x + y = 12 \\ \frac{x + 4}{3} - \frac{y - 6}{2} = 1 \end{cases}$$

Άσκηση 3^η

Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $\sin \omega = -\frac{3}{5}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Δώστε τον ορισμό του μονώνυμου.
B. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ταυτότητες:
α. $(\alpha - \beta)^3 = \dots\dots\dots$
β. $\alpha^3 - \beta^3 = \dots\dots\dots$
Γ. Να αποδείξετε ότι $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

Θέμα 2^ο

- A.** Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας τυχαίων τριγώνων.
B. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Θαλή.
Γ. Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία ω είναι: $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$A(x) = x(x - 2) + 1 + (2 - x)^2 - [x(x - 4) + 4] \text{ και}$$

$$B(x) = x^2(x + 5) - (x + 5).$$

- A.** Να αποδείξετε ότι $A(x) = x^2 - 2x + 1$.
B. Να παραγοντοποιήσετε τα $A(x)$ και $B(x)$ και να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\Gamma(x) = \frac{A(x)}{B(x)}, \text{ δείχνοντας ότι ισούται με } \frac{x-1}{(x+5)(x+1)}.$$

- Γ.** Να λύσετε την εξίσωση $\Gamma(x) = 1$ δείχνοντας ότι οι ρίζες της είναι το -2 και το -3 .

Άσκηση 2^η

A. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 1 - \frac{x}{2} = \frac{x-2y}{3} \\ x - \frac{2x-y}{4} = \frac{y}{2} \end{cases}$$

δείχνοντας ότι η λύση του είναι $(x, y) = (-2, -4)$.

- B.** Για τις τιμές των x και y του πρώτου ερωτήματος να αποδείξετε ότι:
 $-x(-\alpha - \beta)^2 + y(-\beta + \alpha)^2 = -2[\alpha(\alpha - 6\beta) + \beta^2]$
Γ. Να αποδείξετε ότι η λύση του συστήματος του πρώτου ερωτήματος είναι κορυφή της τετραγωνικής συνάρτησης $y = x^2 + 4x$.

Άσκηση 3^η

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με βάση $B\Gamma$. Αν M μέσο της $B\Gamma$ και P και N μέσα των AB και AG αντίστοιχα, τότε:

- A.** Να δείξετε ότι τα τρίγωνα BMP και $MN\Gamma$ είναι ίσα.
B. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $MN\Gamma$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια με λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$.
Γ. Αν $\omega = \widehat{NMG}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \lambda + \frac{3}{10}$ να αποδείξετε ότι: $\frac{\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu(180^\circ - \Gamma) - \epsilon\phi\omega}{\epsilon\phi\omega - \sigma\upsilon\nu(180^\circ - B)} = \frac{13}{31}$.

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Να συμπληρώσετε τις ταυτότητες:

$$(\alpha + \beta)^2 = \dots\dots$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = \dots\dots$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \dots\dots$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \dots\dots$$

B. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

Γ. Πότε ισχύει ο τύπος: $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$

Θέμα 2^ο

Να γράψετε:

A. Πότε δύο τρίγωνα είναι ίσα μεταξύ τους (κριτήρια ισότητας τριγώνων)

B. Πότε δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα μεταξύ τους (κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Σε τρίγωνο ΑΒΓ ($AB < AG$) προεκτείνουμε την ΑΒ προς το μέρος του Β και παίρνουμε σημείο Δ έτσι ώστε $AD = AG$. Στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε σημείο Ε, έτσι ώστε $AB = AE$. Να αποδείξετε ότι $DE = BG$.

Άσκηση 2^η

Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{4}{x^2 - x - 2} - \frac{2x}{3(x - 2)} = \frac{x + 5}{-2 - 2x}$$

Άσκηση 3^η

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις Α και Β:

$$A = (\eta\mu 25^\circ + \sigma\upsilon\nu 25^\circ)^2 + (\sigma\upsilon\nu 155^\circ + \eta\mu 155^\circ)^2$$

$$B = \eta\mu^4 \alpha - \sigma\upsilon\nu^4 \alpha + 2\sigma\upsilon\nu^2 \alpha$$

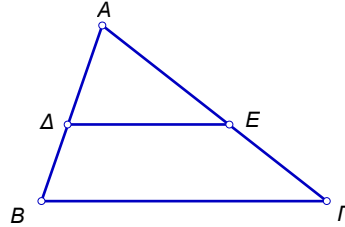
ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Θαλή.

B. Αν $\Delta E \parallel B\Gamma$, να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (**Σ**), αν είναι σωστές ή με (**Λ**), αν είναι λανθασμένες:

- α.** $\frac{\Delta B}{E\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$ **β.** $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{E\Gamma}{A\Gamma}$
- γ.** $\frac{AB}{A\Delta} = \frac{A\Gamma}{E\Gamma}$ **δ.** $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma}$



Θέμα 2^ο

A. Να συμπληρώσετε τις ισότητες των παρακάτω αξιοσημείωτων ταυτοτήτων και στη συνέχεια να τις αποδείξετε:

α. $(\alpha - \beta)^2 =$

β. $\alpha^2 - \beta^2 =$

γ. $(\alpha + \beta)^2 =$

B. Επιλέξτε αν είναι σωστές ή λάθος οι παρακάτω προτάσεις:

Σ - Λ

α. Ισχύει πάντα ότι: $(\alpha - \beta)^2 = (-\alpha + \beta)^2$

β. Ισχύει ότι: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$

γ. Ισχύει ότι: $(5\omega + 4)^2 = 25\omega^2 + 16$

δ. Ισχύει ότι: $(3x - y)^2 = 3x^2 - 2 \cdot 3x \cdot y + y^2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Να λύσετε τα συστήματα: **A.** $\begin{cases} 3x - 7y = 1 \\ 4x + y = 53 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} 5(x + 2y) - (3x + 11y) = 14 \\ 7x - 9y - 3(x - 4y) = 38 \end{cases}$

Άσκηση 2^η

A. Να μετατρέψετε σε γινόμενα τις παραστάσεις:

α. $9x^2 - 16$

β. $4x^2 + 4x + 1$

γ. $xy + x^2 - x - y$

δ. $x^2 + 3x + 2$

ε. $1 - 2\alpha + 2\beta\gamma + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2$

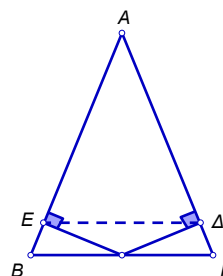
B. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{1}{x^2 + 3x + 2} - \frac{x + 1}{2x + 4} = \frac{1}{x + 1}$

Άσκηση 3^η

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και M το μέσον της βάσης $B\Gamma$. Από το M φέρνουμε τα τμήματα $M\Delta$ και ME κάθετα προς τις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

A. Τα τρίγωνα ΔBM και $E\Gamma M$ είναι ίσα,

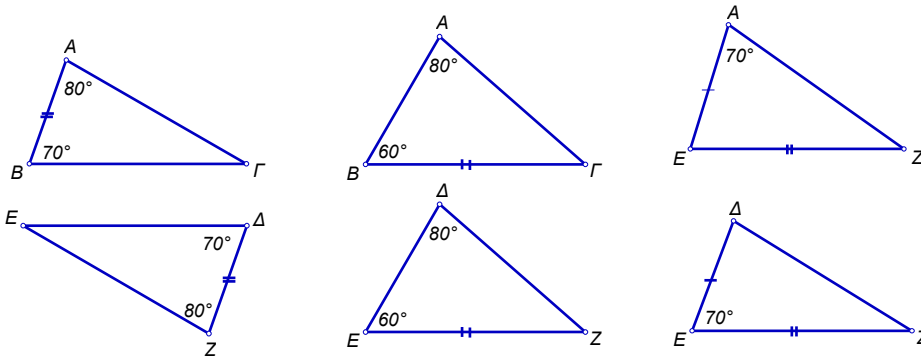
B. Το τρίγωνο AED είναι ισοσκελές.



ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Τι ονομάζεται διάμεσος ενός τριγώνου και τι ονομάζεται ύψος ενός τριγώνου;
B. Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας δύο τριγώνων.
Γ. Ποια από τα παρακάτω ζεύγη τριγώνων είναι ίσα τρίγωνα;
(Να μη δικαιολογήσετε την απάντησή σας).



Θέμα 2^ο

- A.** Τι ονομάζεται ταυτότητα;
B. Να γράψετε 5 αξιοσημείωτες ταυτότητες που γνωρίζετε (εκτός από την ταυτότητα του ερωτήματος γ).
Γ. Αποδείξτε την ταυτότητα:
 $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Να λυθεί το σύστημα:

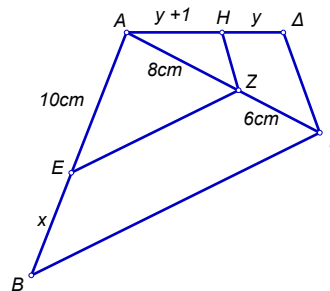
$$\begin{cases} \frac{y-1}{2} - \frac{x+2}{6} = \frac{y}{6} - \frac{1}{3} \\ 3x - 2(y-1)^2 - (x-2) \cdot (x+2) = 2y^2 - x^2 + 1 \end{cases}$$

Άσκηση 2^η

Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{3x+1}{x-3} + \frac{4}{5-x} = \frac{2x^2-13x+1}{x^2-8x+15}$

Άσκηση 3^η

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ότι $EZ \parallel B\Gamma$ και $ZH \parallel \Gamma\Delta$.
 Να υπολογίσετε τα τμήματα x και y .

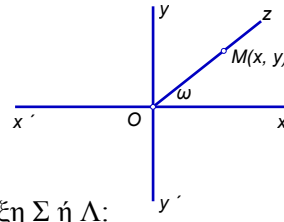


ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Στο διπλανό σχήμα δίνεται σημείο $M(x, y)$ τέτοιο

ώστε $\widehat{XOM} = \hat{\omega}$ και $OM = \rho$. Να ορίσετε τους
τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .



B. Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$.

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη Σ ή Λ:

α. Εάν $\eta\mu^2\omega = \frac{3}{5}$ τότε $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{2}{5}$ **β.** $\sigma\upsilon\nu 180^\circ = -1$

γ. $\eta\mu 150^\circ = -\eta\mu 30^\circ$ **δ.** Εάν $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$ τότε $\epsilon\phi\omega = 0$

Θέμα 2^ο

A. Τι λέγεται παραγοντοποίηση;

B. Αποδείξτε ότι: $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ προτάσεις με την ένδειξη Σ ή Λ:

α. $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$ **β.** $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \beta^2 - \alpha^2$

γ. Ισχύει $\frac{x^2+1}{x} = x+1$ για κάθε $x \neq 0$ **δ.** Το Ε. Κ. Π. των $6x^2y, 3xy^2, 12x$ είναι $12x^2y^2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

A. Να λυθεί η εξίσωση: $(2x+1)^2 + 3(x-1)^2 = 7(x^2+3) - 3$

B. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{1}{x^2-2x} + \frac{x-1}{x} = \frac{x}{x-2}$

Γ. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{\kappa}{7}x^2 + \lambda x + 2 = 0$

όπου κ η λύση που βρήκατε στο (α) και λ η λύση που βρήκατε στο (β).

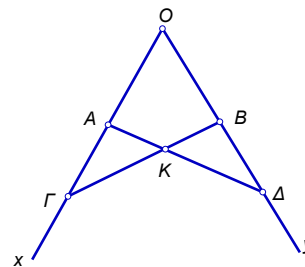
Άσκηση 2^η

Δίνεται γωνία \widehat{xOy} και στις πλευρές της $Ox,$

Oy τα σημεία A, Γ και B, Δ αντίστοιχα ώστε:

$OA = OB, O\Gamma = O\Delta$. Δείξτε ότι:

A. $\widehat{OB\Gamma} = \widehat{O\Delta A}$ **B.** $\widehat{KA\Gamma} = \widehat{KB\Delta}$ **Γ.** $AB \parallel \Gamma\Delta$



Άσκηση 3^η

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = -2 \cdot \eta\mu 30^\circ + \sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ + 2\sqrt{3} \cdot \eta\mu 60^\circ$$

$$B = 5 \cdot (\eta\mu 70^\circ \cdot \eta\mu 110^\circ - \sigma\upsilon\nu 70^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 110^\circ)$$

A. Δείξτε ότι $A = 3, B = 5$

B. Εάν $\eta\mu\omega = \frac{A}{B}$, όπου A, B οι τιμές του (α) ερωτήματος και ω αμβλεία, βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\omega$ και την $\epsilon\phi\omega$.

Γ. Υπολογίστε την παράσταση:
$$K = \frac{5 \cdot \eta\mu(180^\circ - \omega) - 5 \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega)}{\frac{4}{3} \cdot \epsilon\phi(180^\circ - \omega)}$$

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Τι ονομάζεται ταυτότητα;

B. Να αποδείξετε ότι: $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

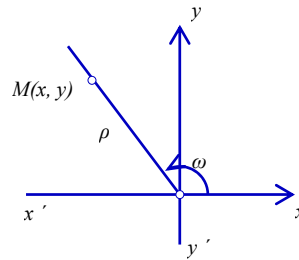
Γ. Να χαρακτηρίσετε ως Σωστό ή Λάθος τις σχέσεις:

α. $(-x - y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ **β.** $(2 + a) \cdot (4 + 2a + a^2) = 8 + a^3$

γ. $(\alpha - \beta)^3 = -(\beta - \alpha)^3$ **δ.** $(-x - y) \cdot (-x + y) = x^2 - y^2$

Θέμα 2^ο

Στο διπλανό σχήμα δίνεται σημείο $M(x, y)$, τέτοιο ώστε να είναι γωνία $\angle xOM = \omega$ και $OM = \rho$.



A. Να ορίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

B. Με την προϋπόθεση ότι $\sin\omega \neq 0$ να αποδείξετε

$$\text{ότι } \varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}.$$

Γ. Να συμπληρωθούν οι ισότητες:

$$\eta\mu(180 - \omega) = \dots\dots \quad \sigma\upsilon\nu(180 - \omega) = \dots\dots \quad \varepsilon\varphi(180 - \omega) = \dots\dots$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-1) \cdot (y-1) \cdot (y+1) = y \cdot (y+1) + x^2 \\ \frac{x-2}{2} - \frac{y-2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Άσκηση 2^η

A. Αφού πρώτα βρείτε τις τιμές για τις οποίες ορίζονται, να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

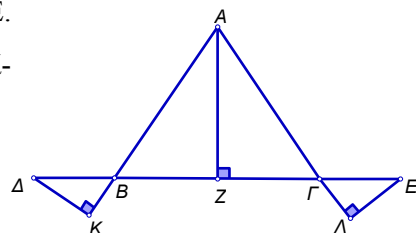
$$K = \frac{2x^3 - 162x}{2x^2 - 18x} \text{ και } \Lambda = \frac{2x^3 - 8x^2 + 8x}{(x-2)^2}.$$

B. Στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση:
$$\frac{\Lambda}{x+3} = \frac{2}{x-3} + \frac{K}{9-x^2}$$

Άσκηση 3^η

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στις προεκτάσεις της βάσης $B\Gamma$ παίρνουμε σημεία Δ, E έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$.

Αν είναι $\Delta K \perp AB$, $E\Lambda \perp A\Gamma$ και $AZ \perp B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:



A. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.

B. Τα τρίγωνα $B\Delta K$ και $\Gamma E\Lambda$ είναι ίσα.

Γ. Τα τρίγωνα $BK\Delta$ και ABZ είναι όμοια και να γράψετε τους αντίστοιχους λόγους ομοιότητας.